

## Zadania z Rzeczywistej Struktury Materiałów (4)

1. Wykaż, że hydrostatyczny stan naprężeń jest niezmienniczy względem obrotu układu odniesienia.
2. Wykaż, że suma składowych normalnych („trace”) tensora naprężeń jest niezmiennicza (względem zmiany układu odniesienia).  
Postępując podobnie, wykaż, że względna zmiana objętości ciała (dylatacja) jest także niezmiennicza.
3. Udowodnić słuszność równania wyrażającego stan równowagi w materiale, przy istnieniu w nim stanu naprężeń  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad \text{lub inaczej:} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0.$$

*Wskazówka:* Rozważ jednostkowy sześcian materiału i jego równowagę statyczną.

4. Wykaż słuszność warunku zgodności, jaki muszą spełniać składowe tensora odkształcenia (przypadek 2-wymiarowy):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{2\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

*Wskazówka:* rozpocząć od wypisania wyrażen na składowe tensora gradientu przemieszczenia.

5. Dany jest dwuwymiarowy tensor naprężeń:  $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ . Znaleźć wartości własne

$$\sigma'_{11} \text{ oraz } \sigma'_{22} \text{ oraz taki układ współrzędnych, w którym } \sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} \end{bmatrix}.$$

(Jest to wyjątkowo prosty przypadek problemu wartości własnych oraz osi głównych).

6. Znaleźć wartości własne i osie główne tensora naprężeń:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

7. Wykazać, jak trzeba przekształcić tensor  $S_{ijkl}$  w macierz  $S_{mn}$ , aby poprawne było działanie:  $\varepsilon_m = S_{mn}\sigma_n$ .
8. Wyprowadzić wzór na energię sprężystą (właściwą) w materiale w którym panuje stan jednorodnych naprężeń  $\sigma_{ij}$  oraz spełniony jest warunek:  $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 0$ .  
Rozważyć:
  - a) materiał o symetrii sześciiennej,
  - b) materiał izotropowy.